$\mathbb{R}^n \xleftarrow[e_1 \cdots e_n]{\text{标准正交基}} V = \mathbb{R}\text{-线性空间} \xrightarrow{\alpha_1 \cdots \alpha_n} \mathbb{R}^n$

$I \longleftarrow (\ ,\ ) \longrightarrow G > 0.$

$\Rightarrow \forall G > 0\ \exists$ 可逆 P （不唯一！） s.t. $G = P^T P$ $\qquad (\alpha_1 \cdots \alpha_n) = (e_1 \cdots e_n) P.$

V 欧氏空间 $\xrightarrow[1:1]{\text{标准正交基 } \alpha_1, \cdots, \alpha_n}$ $\mathbb{R}^n$, $((x_i), (y_i)) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

$\{\mathcal{A}\} \xleftrightarrow[1:1]{\mathcal{A}(\alpha_1 \cdots \alpha_n) = (\alpha_1 \cdots \alpha_n) A} \{A\}$

$\quad \cup \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cup$

$\{$保持内积的线性变换$\} \xleftrightarrow[1:1]{} \{??\}$

例：空间（平面）的旋转与镜面反射.

§7.3 欧氏空间中的线性变换

§ 正交变换与正交矩阵

定义： V 为 n-维欧氏空间， $\mathcal{A}: V \to V$ 一个线性变换. 若 $\mathcal{A}$ 保持内积，即 $\forall a, b \in V$,

$$(\mathcal{A}a, \mathcal{A}b) = (a, b)$$

则称 $\mathcal{A}$ 为正交变换.

正交变换的等价刻画：

定理： $\mathcal{A}$ 为欧氏空间 V 上的一线性变换. 则以下条件等价

1) $\mathcal{A}$ 正交
2) $\mathcal{A}$ 保持向量长度
3) $\mathcal{A}$ 将标准正交基变为标准正交基.

证： 1) ⇒ 2)： $|\mathscr{A}a| = \sqrt{(\mathscr{A}a, \mathscr{A}a)} = \sqrt{(a,a)} = |a|$

2) ⇒ 1)：
$$\left.\begin{aligned} &(\mathscr{A}(a+b), \mathscr{A}(a+b)) = (a+b, a+b) \\ &(\mathscr{A}a, \mathscr{A}a) = (a,a) \\ &(\mathscr{A}b, \mathscr{A}b) = (b,b) \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow (\mathscr{A}a, \mathscr{A}b) = (a,b)$$

1) ⇒ 3)：设 $e_1, \cdots, e_n$ 为标准正交基，则

$$(\mathscr{A}e_i, \mathscr{A}e_j) = (e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$\Rightarrow \mathscr{A}e_1, \cdots \mathscr{A}e_n$ 为标准正交基.

3) ⇒ 1)：设 $\mathscr{A}$ 将标准正交基 $e_1, \cdots, e_n$ 变为标准正交基 $\mathscr{A}e_1, \cdots \mathscr{A}e_n$，则任

$$a = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i, \quad b = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i$$

$$\begin{aligned} (\mathscr{A}a, \mathscr{A}b) &= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mathscr{A}e_i, \sum_{j=1}^{n} b_j \mathscr{A}e_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j (\mathscr{A}e_i, \mathscr{A}e_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j \delta_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \\ &= (a,b) \end{aligned}$$

性质：V 为 n 维欧氏空间. 则

1) 单位变换是正交变换

2) 两正交变换的复合仍然是正交变换

3) 正交变换一定可逆，其逆也为正交变换

证：1) √

2) $(\mathscr{A}\circ\mathscr{B}(a), \mathscr{A}\circ\mathscr{B}(b)) = (\mathscr{B}(a), \mathscr{B}(b)) = (a,b) \Rightarrow$ √

3) $(\mathscr{A}^{-1}(a), \mathscr{A}^{-1}(b)) = (\mathscr{A}(\mathscr{A}^{-1}(a)), \mathscr{A}(\mathscr{A}^{-1}(b))) = (a,b)$

正交变换在标准正交基下的矩阵

$$\underbrace{\mathscr{A}}_{\text{正交变换}}(\overbrace{e_1,\cdots,e_n}^{\text{标准正交基}}) = (e_1,\cdots,e_n)A \qquad \left(A=(a_{ij})_{n\times n},\ \mathscr{A}e_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}e_k\right)$$

A → 有啥特殊的性质？

$$\mathscr{A}\text{ 正交} \Leftrightarrow (\mathscr{A}e_i, \mathscr{A}e_j) = (e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i\neq j \\ 1 & i=j \end{cases}$$

$$\left(\begin{aligned} (\mathscr{A}e_i, \mathscr{A}e_j) &= \left(\sum_{l=1}^{n} a_{li}e_l, \sum_{k=1}^{n} a_{kj}e_k\right) \\ &= \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{li}a_{kj}(e_l, e_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = (A^TA)_{ij} \end{aligned}\right)$$

$$\Leftrightarrow A^TA = I_n$$

定义: 如实方阵 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 满足 $A^TA=I$ (或 $A^{-1}=A^T$) 则称A为正交矩阵。

注: $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为正交矩阵 $\Leftrightarrow$ A的行向量(或列向量)构成 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基.

定理: $\mathscr{A}$ 为欧氏空间 V 上的线性变换, 则
$\mathscr{A}$ 为正交变换 $\Leftrightarrow$ $\mathscr{A}$ 在标准正交基 $e_1\cdots e_n$ 下的矩阵A为正交矩阵

$$\mathscr{A}\text{ 正交变换} \xleftrightarrow[1:1]{\text{标准正交基}} A\text{ 正交矩阵}$$

A正交 $\Leftrightarrow$ $A^TA=I$ $\Rightarrow$ $\det(A)=\pm1$

例 旋转

1° $\det A=1$, 称 $\mathscr{A}$ 为第一类变换 $\leftarrow$

2° $\det A=-1$, 称 $\mathscr{A}$ 为第二类变换 $\leftarrow$ 反射

性质: $\mathscr{A}$ 为欧氏空间 V 上的正交变换, 则

1) $\mathscr{A}$ 的特征值模长都为1, 特别地实特征值只可能为 ±1.

2) V 的维数为奇数且 $\mathscr{A}$ 为第一类正交变换, 则1为 $\mathscr{A}$ 的特征值.

证: 1) $\mathscr{A}\to A \Rightarrow A^TA=I \overset{\text{例6.3.3(4)}}{\Rightarrow} |\lambda|=1$ $\left(A\xi=\lambda\xi \Rightarrow \bar{\xi}^T\xi=\bar{\xi}^T\bar{A}^TA\xi = \bar{\lambda}\lambda\cdot\bar{\xi}^T\xi \Rightarrow |\lambda|=1 \right)$

2) $\varphi_A(\lambda)$ 为奇数多项式, 复根成对出现, 不妨设

$$\varphi_A(\lambda)=\left[\prod_{i=1}^{s}(\lambda-\lambda_i)(\lambda-\bar{\lambda}_i)\right]\cdot\left[\prod_{j=1}^{t}(\lambda-\eta_j)\right]$$

则 t 为奇数. $\mathscr{A}$ 正交 $\Rightarrow \eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t\in\pm1$.

$\mathscr{A}$ 为第一类 $\Rightarrow \prod_{i=1}^{s}(\lambda_i\cdot\bar{\lambda}_i)\cdot\prod_{j=1}^{t}\eta_j=1$

$\Rightarrow \prod_{j=1}^{t}\eta_j=1 \Rightarrow \eta_1,\cdots,\eta_t$ 必有一个为1.

④ **推论**: 三维空间中的第一类正交变换保持一个向量, 从而一定为旋转变换

$$\text{欧氏空间 } V \xrightarrow[1:1]{\text{标准正交基 } \alpha_1 \cdots \alpha_n} \mathbb{R}^n \qquad (x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\{\mathscr{A}\} \xrightarrow[1:1]{\mathscr{A}(\alpha_1 \cdots \alpha_n) = (\alpha_1 \cdots \alpha_n) A} \{A\}$$

$$\cup \qquad\qquad\qquad\qquad \cup$$

$$\text{保持内积} \longleftarrow \{\mathscr{A} \mid \text{正交}\} \xrightarrow[1:1]{\mathscr{A}(\alpha_1 \cdots \alpha_n) = (\alpha_1 \cdots \alpha_n) A} \{A \mid \text{正交}\} \longrightarrow A^T A = I$$

转置

保持 $A+B \Rightarrow \mathscr{A} + \mathscr{B}$ $\quad A^T$?

$\lambda A \Rightarrow \lambda \mathscr{A}$

$AB \Rightarrow \mathscr{A} \circ \mathscr{B}$.

§ 转置与伴随变换

定理：1) 设 $\mathscr{A}$ 为欧氏空间 V 上的线性变换. 则 V 上存在唯一的线性变换 $\mathscr{A}^*$，满足

$$(\mathscr{A}\alpha, \beta) = (\alpha, \mathscr{A}^*\beta) \qquad \forall \alpha, \beta \in V$$

2) 若 $\mathscr{A}$ 在标准正交基 $e_1 \cdots e_n$ 下矩阵为 A，则 $\mathscr{A}^*$ 在 $e_1 \cdots e_n$ 下矩阵为 A^T

称 $\mathscr{A}^*$ 为 $\mathscr{A}$ 的<u>伴随变换</u>